

数学科 学習指導案

府立岸和田高等学校
指導者 北本 浩一

1. 日時 令和元年 11 月 20 日 (水) 第 6 時限 (14 時 20 分～15 時 10 分)

2. 場所 同窓会館 2 階 会議室

3. 学年・組・科目 第 2 学年 4 組 (37 名)・数学Ⅲ

4. 単元 (題材) 名 第 3 章 数列の極限 第 2 節 無限級数

(教科書：詳説数学Ⅲ (啓林館))

5. 単元 (題材) の目標

- 無限級数の収束・発散に関心を持ち、具体的な問題の解決に対し、自ら考察しようとする。

【関心・意欲・態度】

- 数列の極限に着目し、事象を数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って、その事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりする。

【数学的な見方や考え方】

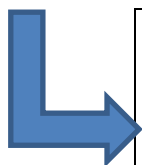
- 無限級数の収束・発散やその性質について理解し、無限等比級数などの簡単な無限級数の和を求めることができる。

【数学的な技能】

- 無限級数の収束・発散やその性質について理解することができる。

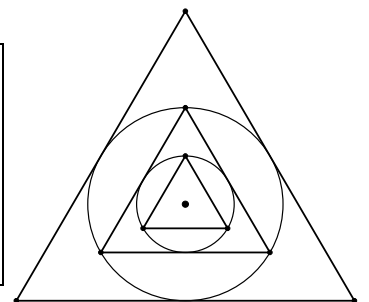
【知識・理解】

※教科書 p.98 例題 10 を相似比を考えて、面積の和が無限等比級数になることを理解して求めることができるようになる。



例題 10

右の図のように正三角形の内接円にさらに内接する正三角形を作っていく。1 辺の長さが 2 の正三角形 $P_1Q_1R_1$ から始めて、次々と $\triangle P_1Q_1R_1$, $\triangle P_2Q_2R_2$, $\triangle P_3Q_3R_3$, \dots , $\triangle P_nQ_nR_n$, \dots を作るとき、これらの正三角形の面積の総和 S を求めよ。



6. 生徒観

(略)

7. 教材観

この単元は、高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 「数学Ⅲ」の内容 (1) 極限ア (イ)、イ (ウ)、〔課題学習〕に対応している。無限の概念は数学Ⅱの範囲では直観的にとらえていたが、数学Ⅲの数列の極限、無限級数の単元で、ある程度論理的に扱う。収束、発散の条件を理解し、極限值を求める計算ができるようにしたい。また、数列の極限や無限級数の性質を確率や図形の問題に活用できるようにしたい。

8. 指導観

本時に取り組む課題はかなり発展的な問題であるが、論理的に分解して整理し、具体的でシンプルな問題の集合にすることで解決できることを実感させたい。4～5人のグループに分かれ、各自が自らの考えを出し合い、グループ内で、互いに協力して、解決に近づけてもらいたい。論理的かつ的確な説明をして他者の理解を得る力を養いたい。

9. 単元（題材）の評価規準

a : 関心・意欲・態度	b : 数学的な見方や考え方	c : 数学的な技能	d : 知識・理解
無限級数の収束条件等に興味をもち、その和を求めようとする。 図形の問題にも興味をもち、級数の極限を応用しようとする。	無限級数の収束条件を考え、その和の意味を捉えることができる。 これらを用いて図形の問題などを考察することができる。	無限級数の収束条件を確認して、その和を求めることができ、循環小数などの事象を無限級数の考え方で表現・処理することができる。	無限級数の意味や性質を理解し、収束条件や和の求め方などの基礎的な知識を身に付けている。

*○必要に応じて評価する (指導に生かす評価)
◎全生徒を評価する (記録に残す評価)

10. 単元の指導と評価の計画 (全6時間)

時	学習内容	学習活動における 具体的評価規準				主な評価規準・評価方法
		a	b	c	d	
第1時	無限級数の収束とその和	○	○	◎		【a】無限級数に興味を持ち、その和を求めようとする。 (机間指導・観察) 【b】部分和において数学Bの知識を用いることで、無限級数の和を考察できる。 (机間指導・観察) 【c】部分分数分解などの技法を用いて無限級数の和を求めることができる。 (小テスト、宿題)
第2時	発散する無限級数	○		◎		【a】各項は0に収束するが、級数としては発散する無限級数の不思議さに興味を持つ。 (机間指導・観察) 【c】既習の無限数列の極限の求め方を部分和に応用し、無限級数の収束・発散を調べることができる。 (小テスト、宿題)
第3時	無限等比級数の収束・発散			◎	○	【c】収束条件に留意し、無限等比級数の和を求めることができる。 (小テスト、宿題) 【d】無限等比級数の収束や発散の条件と和の公式を理解する。 (机間指導・観察)
第4時	無限等比級数の応用	○		◎		【a】やや複雑な図形の問題に興味を持ち、無限等比級数を利用しようとする。 (机間指導・観察) 【c】循環小数を無限等比級数の和の公式を用いて、分数に直すことができる。 (小テスト、宿題) 【c】図形や無限等比級数の性質に注意しながら、論理的で分かり易い解答を作成できる。 (発問・グループ発表)

第5時	無限級数の性質			◎	○	<p>【c】等比数列の実数倍や和・差による無限級数の和を収束条件の確認をして、求めることができる。</p> <p>(小テスト、宿題)</p> <p>【d】数列の極限値の性質に気付き、実数倍や和・差による無限級数の和の求め方を理解している。</p> <p>(机間指導・観察)</p>
第6時 (本時)	課題学習(フラクタル図形の面積を求める)	◎	○	○		<p>【a】複雑な図形の問題に興味を持ち、無限級数を利用して解こうとしたり、その結果に対して考察している。</p> <p>(振り返りシート)</p> <p>【b】数学的に適切な方法で問題を簡単な問題に分割できる。</p> <p>(机間指導・観察)</p> <p>【c】論理的かつ的確な説明をして他者の理解を得ることができる。</p> <p>(机間指導・観察、グループ発表)</p>

1.1. 本時の展開

(1) 本時の目標 (第6時)

- 前回までに学習した無限等比数列の収束条件や性質に注意して、フラクタル図形の面積を論理的に求める解法を理解する。
- 自分の考えや解法を他者に理解させることができるようになる。

(2) 本時の評価規準

- 【a】やや複雑な図形の問題に興味を持ち、無限級数を利用して解こうとしたり、その結果に対して考察している。
- 【b】数学的に適切な方法で問題を簡単な問題に分割できる。
- 【c】論理的かつ的確な説明をして他者の理解を得ることができる。

(3) 準備物

教科書、ワークシート、まなボード、ホワイトボードマーカー、ストップウォッチ、提示用 PC

(4) 本時の学習過程

時間	学習内容・学習活動	指導上の留意点	評価規準 (評価方法)
5分	・ 前時の学習内容の小テスト	・ 問題は等比数列の和の形で表された無限級数の和を求める問題2題	【c】等比数列の実数倍や和・差による無限級数の和を収束条件の確認をして、求めることができる。 (小テスト)
10分	・ 本時の目標の提示(プリント両面2題) ① コッホ雪片の面積 ② シェルピンスキーのギャスケット	・ 第1時で紹介したフラクタル図形についてスライドを用いて説明する。 ・ 本時の目標である無限級数の知識・技能を活用して課題解決していくように意識を持たせていく。	【a】目標を理解し、フラクタル図形の面積の問題に興味や課題解決の見通しを持つ。 (机間指導・観察)

① 面積が1の正三角形 A_0 から始めて、図形 A_1, A_2, A_3, \dots をつくる。ここで A_n は A_{n-1} の各辺の3等分点を頂点にもつ正三角形を A_{n-1} の外側につけ加えてできる図形である。(下図は $A_0 \sim A_4$)

(1) 図形 A_n の面積を S_n とし、 $T_n = S_n - S_{n-1}$ とする。 T_n を n の式で表せ。($n \geq 1$)
(T_n は A_{n-1} から A_n をつくるときに増える面積である。)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

この操作を限りなく続けていったときにできる図形をコッホ雪片という

② 面積が1の正三角形 A_0 から始めて、図形 A_1, A_2, A_3, \dots をつくる。ここで A_n は A_{n-1} の各辺の中点を頂点にもつ正三角形を A_{n-1} の内側から取り除いてできる図形である。(下図は $A_0 \sim A_4$)


(1) A_{n-1} から A_n をつくるときに取り除かれる面積を T_n とするとき、 T_n を n の式で表せ。

(2) 図形 A_0 から図形 A_n ができるまでの間に取り除かれる面積の和を S_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

この操作を限りなく続けていったときにできる図形をシェルピンスキーのギャスケットという

25分	課題解決に向かってグループワーク ・ ①, ②のいずれかを解く。 ・ 役割分担を決める。 ・ まなボードにグループで出たアイデアを書きあげる。 ・ アイデアを答案に仕上げる。	・ 4～5人のグループに分ける。 ・ 各グループにまなボードを配付する。 ・ 教科書やポートフォリオを使ってもよいと指示をだす。 ・ 相似比から面積比を考えることなど各グループで解答に結びつくアイデアが出たら、頃合いを見て他のグループにも共有させる。	【b】 図形の個数の増え方や増える面積の比等、問題を細分化してそれに着目することができる。 (観察・ワークシートの記述) 【c】 グループ内で、試行錯誤をしながら解答をまとめる。 (観察・ワークシートの記述)
10分	全体への発表(2グループ)	・ 生徒の解法で気になるところについては「なぜそうなるのか」問う。 ・ 生徒の解法で不十分な所は、適宜補足する。	【c】 論理的かつ的確な説明をして他者の理解を得ることができる。 (代表者のプレゼンテーション) 【a】 発表でないときは真剣に聞き、自分のグループの解答と比較し考えを記入する。 (観察)
	まとめ・振り返り	・ 振り返りシートを配布し、次回の授業で提出させる。	【a】 課題解決に至るまでの考えを整理したり、結果を考察している。 (振り返りシートの記述)

「観点別評価の判断基準」の設定

判断基準 評価規準	A 十分満足できる	B おおむね満足できる	C 指導の手立て
【b】	B (おおむね満足できる) に加えて、1回の操作で付け加える(②の問題は取り除かれる)面積を n を用いて表し、無限等比級数の考えを用いて課題の面積を求めることができる。	付け加える(②の問題は取り除かれる)正三角形1つの面積の値が等比数列であることに気付く。またその個数についても言及出来ている。	 机間指導を行い、グループの中で課題解決に向かうアイデアが出てくれば、頃合いをみて全体化する。特に相似比から面積比に気付くことや数列化する部分は丁寧にアシストする。