

高等学校 数学科

数学Ⅲ（2年）単元名「無限数列」（数列の各項を無限回、足し合わせると・・・）

府立岸和田高等学校 授業者 指導教諭 北本 浩一

I 単元を通して育成をめざす資質・能力

【めざす生徒の学ぶ姿】

無限等比級数が収束する場合と発散する場合のそれぞれについて、公比が満たすべき条件について理解する。収束する場合についてはその和の公式を導き、課題学習の場面において具体的に活用し問題の解決ができるようになる。

【学習指導要領(平成30年告示)との関連】

数学Ⅲ（1）極限ア(イ)、イ(ウ)、〔課題学習〕

知識及び技能	無限級数の収束・発散やその性質について理解するとともに、無限級数の和を求めることができる。 【新しい対象について、表現・処理することを可能にする数学的な知識や技能】
思考力、判断力、表現力等	数列の極限に着目し、事象を数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って、その事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりする。 【見出した数理について、数学的な表現を適切に用いながら論理的に説明する力】
学びに向かう力、人間性等	無限級数の収束・発散に関心を持ち、具体的な問題の解決に対し、自ら考察しようとする。 【事象と数学的な表現の整合性を取りながら、その事象を考察していくことで有用性やよさを実感する態度】

II 単元計画（資質・能力育成のプロセス）全6時間

時	めざす生徒の姿	学習活動・学習内容	教師の支援・指導 (★深い学びを生み出す)
1・2 (第1次)	<p>「無限回ならば、水は溢れると思うけどなあ・・・」</p> <p>「第n項を考えたり、部分和を求めることまでは数学Bの数列で習ったよな」</p> <p>「いきなり無限級数の和を求めることができないから部分和の極限を考えるんだ」</p>	<p>○無限級数の収束・発散について理解し、和を求める活動</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 数学的事例について考える。(フラクタル図形の紹介) ・ 定義や新出用語を確認する。(第n項までの部分和、無限級数の和) ・ 無限級数の和について調べる。 	<p>○無限級数に関する数学的事例を提示する。</p> <p>計量カップ（200 ml）に半分の量の水を入れる。次に前に入れた量の半分の量の水を入れる。こんな風にこの操作を続けます。カップの水は溢れるかな？</p> <p>★結果を予想したり、問題解決の方法を考える。</p> <p>○定義や新出用語及び例題や練習問題の解法の説明を通して知識や概念の定着を図る。</p>

獲得事項①

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束するならば } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

ポイント①

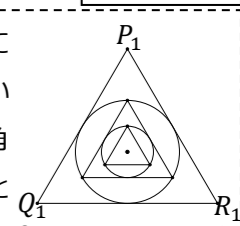
問題例①

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

の和について調べてみよう。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

の収束・発散を調べよう。

3・4・5 (第2次)	<p>「今回の部分和は等比数列の和の公式を使うんだけど、公比 r を場合分けして考えるんだ」</p> <p>「単元最初の問題は初項 100、公比 1/2 の無限等比級数の和だから限りなく 200mL に近づくとのことだから溢れないんだ」</p> <p>「循環小数を分数で表すことは数学 I の実数で習ったけど、こんな解法もあるんだ」</p>	<p>○無限等比級数の収束・発散について理解し、和を求める活動</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 新出用語や定義を確認する。 ・ 収束や発散の条件及び和の公式を理解する。 ・ 循環小数を分数に直す。 ・ 図形の問題に応用する。 ・ 実数倍や和・差による無限級数の和を求める。 	<p>○練習問題は生徒 4 人を 1 グループにして、他者と協働しながら問題解決に取り組ませる。</p> <p>○代表グループに発表をさせる。その際『なぜそのように考えるのか。』と問う。</p> <p>○用いた公式や定理のうち、復習が必要なものは答えさせ板書する。</p> <p>★『結局、解答のポイントはどこか。』と再度問い、次時の課題学習につなげる。</p>
6 (第3次)	<p>①「増える面積を考えるには、増えていく正三角形の個数を考えないといけないのかな」</p> <p>②「増える正三角形の個数は辺の数とどう関係にあるのかな」</p> <p>③「限りなく正三角形を増やしていくのに、面積は有限の値に収束するのが不思議だ」</p> <p>④「極限值 1 は元の正三角形の面積に等しいので、この操作を無限に繰り返すと何も残らないことになる」</p>	<p>獲得事項②</p> <p>無限等比級数</p> $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ <p>は $-1 < r < 1$ のとき収束し、その和は $\frac{a}{1-r}$ である</p> <p>「無限級数の課題学習」フラクタル図形（コッホ雪片、シェルピンスキーのギャスケット）の面積を求めよう。</p> <p>○数列の極限に着目し、事象を数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴を考察する。</p>	<p>問題例②</p> <p>▶正三角形の内接円にさらに内接する正三角形を作っていく。1 辺の長さが 2 の正三角形 $P_1Q_1R_1$ から始めて、次々と $\Delta P_1Q_1R_1, \Delta P_2Q_2R_2, \Delta P_3Q_3R_3, \dots, \Delta P_nQ_nR_n, \dots$ を作るとき、これらの正三角形の面積の総和 S を求めよ。</p>  <p>○どのような結果になるか予想させてみる。</p> <p>○課題解決に向かって主導するのではなく、生徒同士の論理的な意見交換を促進させるファシリテーターの役に徹する。</p> <p>○活動が止まる場合、随時生徒に指示を出していく。</p> <p>○各グループで解答に結びつくアイデアが出たら、頃合いを見て他のグループにも共有させる。</p> <p>★発表者の解答に対して、考えが浅い部分は随時指摘し、新しい見方や考え方に気付かせる。</p>

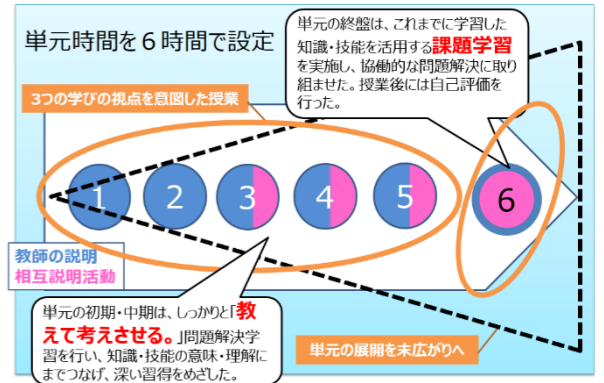
ポイント②

ポイント③

III 「深い学び」を実現するための指導の工夫

◆未広がり単元構想で教えて考えさせる
本実践では課題学習を単元の中核に据えた授業設計を行っている。
初期・中期は、しっかりと「教えて考えさせる」。問題解決型学習を行い、知識・技能の意味・理解にまでつなげ、深い習得をめざしている。終盤では、これまでに学習した知識・技能を活用できるようになるために課題学習を実施し、協働的な問題解決に取り組ませている。

◆学びの自覚を促す
授業後には振り返りシートを用いて生徒の変容を見取っている。習得した知識や技能、活用した「見方・考え方」を（自分で）再確認させることや、事象の特徴を考察することで新たな気づきを得ることができた。

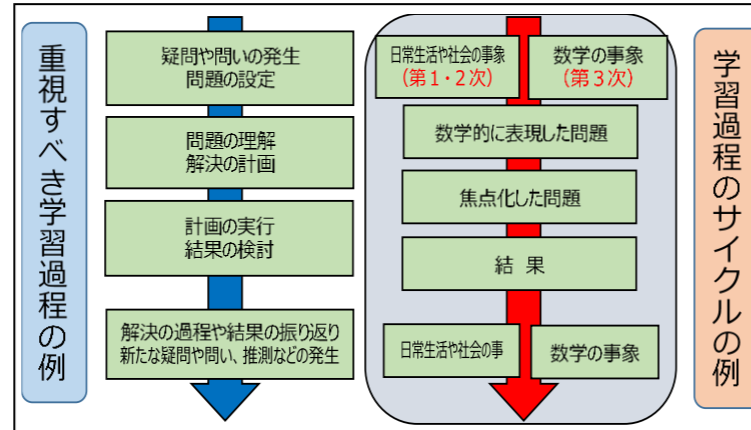


IV 生徒はどのような学びを実現したか

○数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、新しい概念を形成したり、よりよい方法を見出そうとする

本実践の特徴は、生徒が学習の目的を感じながら主体的に学ぶことをねらって、数学の問題発見・解決の過程を意識して授業を構成していることである。

- ▶ 日常生活や社会の事象などを数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程（第1・2次の計量カップに半分の量の水を入れる操作を続ける問題）
- ▶ 数学の事象から問題を見だし、数学的な推論などによって問題を解決し、解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的、体系的に考察する過程（第3次の課題学習 フラクタル図形の面積を求めよう。）



図：算数・数学における問題発見・解決の過程のイメージ

第1次・2次においては無限級数の収束・発散やその性質について理解することで、本単元における様々な知識の裏付けと、技能の支えとなるものを獲得した。また第2次・3次のグループワークや課題学習については、数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、新しい概念を形成したり、よりよい方法を見出したりするなど、新たな知識・技能を身につけてそれらを統合し、生徒の思考や態度が変容することをめざした。

第3次の授業では、教科書を開いて公式や定理を再確認したり、理解があいまいな部分を説明しあったり教え合ったりしながら、グループで協働し、没頭して課題解決に取り組む生徒の姿が見られた。

ポイント①

第1次（1時・2時）

☆単元の冒頭で無限級数に関する数学的事例について全員で考える <<興味や関心を高める>>

第1次では、生徒の興味や関心を持ちそうな課題を提示することで、事象の考察や問

題の解決に数学を積極的に活用する態度を育てた。無限級

数に関する数学的事例として右記

のような問いを投げかけた。生徒の

意見はクラス内で半々に分かれ

た。自然に感じることや直感を裏

切られる体験を単元の最初にする

ことで今後の学習意欲が高まる。

「操作の回数が多くなれば、入れる量はさらに少なくなるから溢れない。」



200 mlの計量カップに半分の量の水を入れる。次に前に入れた量の半分の量の水を入れる。こんな風にこの操作を続けます。カップの水は溢れるかな？

「4回目の操作で、すでに一杯に近いから溢れそうかな。」

授業者はココを見る！

直感でもいので「カップの水は溢れるか溢れないか」を判断し、等比数列に気付くことができているか？

- $100 + 50 + 25 + 12.5 + \dots$ が等比数列の和であることと、その初項や公比が判断できるか。⇒既習事項の再確認
- 教師が最後に「カップの水は溢れない。」と答えを言ったときに生徒の中から「えーっ。なんで！なんで！」と大きな疑問が湧いた。⇒次時以降の無限等比級数について学ぶ際の学習意欲の醸成

ポイント②

第2次（3時・4時・5時）

☆単元の進行にあわせて自分の考えを数学的な表現を用いて説明しあう <<共に考えを創りあげる>>

第2次以降では獲得した無限等比級数に関する知識・技能を使って、グループで考えたり、説明し伝え合う活動を取り入れた。（本単元以外でも年間を通して取り入れている。）生徒は、最初しばらくは教科書等を見ながら1人で考えているが、行き詰ったところで、他の生徒に質問し始める。しかし回を重ねることで、生徒の学習の様子に変化がみられた。ここで大事なのが**教師の役割が「教える」ことから「学び合いを支える」**ことに変化したことである。結果、知識・技能の発表を通して、無限等比級数の和の公式が適切に使えるかどうか、自分自身で確かめ、振り返る機会にもつながった。



- 中の三角形の面積をどのように表すのかを考える等、課題への関わり方が主体的になったなあ。
- みんなで考えをやり取りし、共通点や相違点などを認め、高め合うようになったなあ。

授業者はココを見る！ 生徒の説明に論理的に矛盾がないか？

- 相似比や面積比など解答の際に必要なキーワードが解答に書かれているか。
- 無限等比級数の和の公式を使う際に、初項の値と公比 r が $-1 < r < 1$ であることに言及しているか。

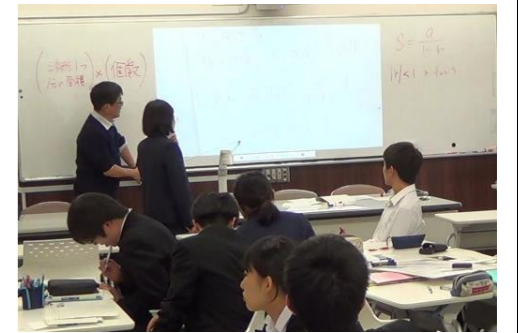
ポイント③

第3次（6時）

☆課題学習に取り組み、互いの考えをつなげて思考を深める

<<知識を相互に関連付ける>>

課題学習の課題は、一人では答えに到達し得なくても複数で挑戦すれば解決できるものであることが望ましい。生徒たちが論理的に課題を分解して整理し、具体的にシンプルな問題に集めて課題解決に向かうように、今回は敢えてたくさんの小問（ヒント）は設けなかった。生徒のこれまでの学習到達状況や単元の学習内容の定着度を十分に考えて、どこまで小問を設定して導くか、どこから自立解決に向かわせるかを考えるとよい。



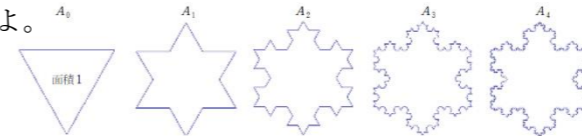
【課題学習で使用した授業プリントの一部】

面積が1の正三角形 A_0 からはじめて、図形 A_1, A_2, A_3, \dots をつくる。ここで A_n は A_{n-1} の各辺の3等分点を頂点にもつ正三角形を A_{n-1} の外側に付け加えてできる図形である。

(1) 図形 A_n の面積を S_n とし、 $T_n = S_n - S_{n-1}$ とする。 T_n を n の式で表せ。（ $n \geq 1$ ）

（ T_n は A_{n-1} から A_n をつくる時に増える面積である。）

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。



【授業後の振り返りシートの記述】

- 増える面積がわかれば、意外にすぐに解けた。無限等比級数の和の公式に感謝です。
- ∞ にある S_n でも極限値は1から1.6ぐらいにしか増えないことに驚いた。
- 確実に面積は増えていってるのに、収束するのはやはり興味深く、面白いことである。
- 辺の長さからではなく、相似比から面積を計算することが意外であった。

V 実践を終えて

授業者より

深い学びを実現し論理的思考力を育むために、課題学習は有効である。難度の高い課題に取り組むことで、生徒は教科書等をめくりかえし基礎を学び直した。他者に対して、論理的で的確な説明をする力を養うことができた。しかし全ての授業を今回のように構成することは困難であり、授業時数にも限りがあるため、疑問や問いを多く取り上げることが難しい。今回の実践を通して改めて**単元や題材のまとまりを見通した指導計画が重要であること**に気付かされた。生徒の実情や指導内容に応じ、単元のどこで現実世界の問題を扱うか、課題学習をどのように実施するかといった重点の置き方、意図的・計画的な指導が求められる。課題学習は各単元の総まとめの時間で取り組ませ、それをゴールに据えて学習意欲を高められるように毎時間の指導内容を精査していきたい。